¿QUÉ SON LOS RADIANES? ¿POR QUÉ SON TAN IMPORTANTES?

En el colegio nos enseñan a medir ángulos usando el sistema sexagesimal, el cual divide una circunferencia en 360 partes llamadas “grados”. Así, por ejemplo, el ángulo que representa un cuarto de circunferencia mediría un cuarto de esos 360 grados, o sea 90°. Y un ángulo que representa la mitad de la circunferencia mediría la mitad de esos 360 grados, es decir 180°. Y así con todos los demás ángulos.

Los antiguos sumerios diseñaron este sistema basado en el número 60, por eso “sexagesimal”. Este sistema también lo usamos para dividir las horas en 60 minutos y los minutos en 60 segundos. La razón es que el 60 tiene un montón de divisores: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 y 60. El número 360 es un múltiplo de 60 que tiene aún más divisores, por eso suena tan útil dividir la circunferencia en 360 grados para poder medir ángulos.

Pero, ¿y si te dijera que este sistema no es el mejor que existe? ¿Qué tal si te dijera que existe un sistema más “natural” para medir ángulos?

Este sistema del que te hablo, en vez de dividir la circunferencia en una cantidad arbitraria de partes, lo que hace es medir ángulos en base al arco de circunferencia que abarcan.

Tomemos la circunferencia de radio 1 como modelo. De esta, seleccionemos un arco de longitud 1. Diremos que el ángulo que abarca este arco de longitud 1, mide 1 unidad. De la misma manera, un ángulo que abarque un arco de largo 2, mediría 2 unidades, y así. Como el perímetro total de la circunferencia es de 2 por pi por el radio, que es 1, o sea 2pi, el ángulo que dé una vuelta completa, abarcando toda la circunferencia de largo 2pi, mediría 2pi unidades.

En general, para una circunferencia de un radio r cualquiera, si usamos las mismas unidades de antes, un ángulo de 1 unidad abarcaría un arco de largo r, un ángulo de 2 unidades abarcaría uno de largo 2r, y finalmente un ángulo de 2pi unidades abarcaría la circunferencia completa, de perímetro 2pir.

A estas unidades las llamamos “radianes”. El nombre viene de “radio”, porque un ángulo de 1 radián abarca un arco cuyo largo es igual al radio de la circunferencia.

Pero, ¿por qué este sistema es más natural que el sexagesimal? En este video te voy a mostrar varios ejemplos de por qué los radianes son más naturales.

ARCOS Y SECTORES CIRCULARES

En una circunferencia de radio r dibuja un ángulo theta con vértice en su centro. ¿Cuánto mide el arco que abarca este ángulo theta? La respuesta depende de qué unidades uses.

Si usas grados sexagesimales, el truco consiste en tomar el perímetro completo, de longitud 2pir, dividirla en 360 partes y luego multiplicar todo por theta, que representa la cantidad de partes que deseas tomar.

Pero si theta es un ángulo en radianes, por definición un ángulo theta abarca un arco de largo theta por r. ¿Cuál de estas dos expresiones es más sencilla? Obviamente la segunda.

Ahora vamos a algo un poco más interesante: ¿cuánto mide el área del sector circular que abarca este ángulo theta?

De nuevo, si usas grados sexagesimales, tomas el área total del círculo, pir^2, la divides en 360 y la multiplicas por el ángulo en grados.

Ahora, ¿cómo calculas el área del sector si usas radianes?

El truco aquí es dividir nuestro ángulo en muchas partes muy pequeñas, en n partes. Así, el sector circular se divide en n partes que se pueden aproximar a triángulos, y el arco abarcado por theta, que vamos a llamar S, se divide también en n partes de largo S/n. Cada uno de estos pequeños triángulos tendría entonces base S/n y altura r, por lo que su área sería (1/2)(S/n)r. El área del sector completo es igual al área de estos n triángulos, así que lo anterior se multiplica por n para obtener (1/2)Sr, y esa sería la fórmula del área del sector circular, en función del arco S y el radio r. En el caso particular de que S sea la circunferencia completa, 2pir, esta fórmula toma el valor (1/2)(2pir)r, que es igual a pir^2, el área de un círculo.

Ahora, este arco S se puede expresar en función de theta. Si usas grados, reemplazas S = (2pir/180)r, y obtienes la misma expresión de antes: (pir^2/360)theta. Pero en cambio, si usas radianes, S es simplemente theta\*r, y la fórmula del área queda (1/2)theta\*r^2. De nuevo, ¿cuál de estas dos expresiones es más elegante?

APROXIMACIÓN SIN(THETA) = THETA PARA ÁNGULOS PEQUEÑOS

En el pasado hice un video sobre funciones trigonométricas, y te recomiendo verlo para entender mejor este tema. En ese video expliqué la siguiente definición del seno y coseno:

En un plano cartesiano, dibuja una circunferencia de radio 1 centrada en el origen, y dibuja un ángulo theta centrado también en el origen, partiendo del eje X. Este ángulo abarca un arco que comienza en el punto (1, 0) y termina en el punto que llamamos P. La coordenada y se puede expresar como sin(theta), y la coordenada x como cos(theta). Así, el punto P es igual a (cos(theta), sin(theta)).

Pero pasan cosas interesantes cuando theta es un ángulo muy pequeño. Cuando pasa eso, por una parte el coseno de theta es aproximadamente igual a 1. Pero el caso del seno de theta es aún más interesante, porque si te fijas, su medida se empieza a parecer un montón a la medida del arco S que abarca theta. Podríamos decir que sin(theta) es aproximadamente igual a este arco S, cuando theta es pequeño.

De nuevo, si mides el ángulo theta en grados sexagesimales, la fórmula del arco es esta, reemplazando r = 1, y te queda que sin(theta) es aproximadamente igual a (2pi/360)\*theta. Pero en cambio, si usas radianes, el arco mide simplemente theta, por lo que sin(theta) se aproxima a theta, que es mucho más elegante.

De hecho, esta última relación equivale a sin(theta)/theta se aproxima a 1 a medida que theta sea más pequeño, o dicho de otra manera, el límite cuando theta tiende a 0 de sin(theta)/theta, es 1. Pero solo si theta está medido en radianes, porque si estuviese medido en grados, este límite habría sido igual a 2pi/360, que ya no es tan bonito.

Este límite es súper importante en el cálculo, y en los ejemplos que vienen veremos por qué.

DERIVADA DEL SENO Y EL COSENO

La derivada de una función es una herramienta súper importante en el cálculo. Se resume en lo siguiente: dada una función f(x), ¿cómo reacciona cuando haces un pequeño cambio en x? ¿Cómo cambia? Si a este pequeño cambio en x le llamamos dx, y a la reacción que tiene en la función f, ese pequeño cambio en f, le llamamos df, ¿cuánto vale df en función de dx? O, ¿cuánto mide la razón df sobre dx? A esto se le conoce como “derivada”: la “razón de cambio de una función”.

Ahora volvamos a la circunferencia unitaria. Si tenemos un ángulo, que ahora vamos a llamar x, y también tenemos el seno de x. La pregunta es: ¿cómo reacciona el seno de x cuando hago un pequeño cambio en x? Dado un ángulo x y un pequeño cambio dx, ¿en cuánto cambia el seno? ¿Cuánto mide dsin(x)?

Como dx es un ángulo muy pequeño, el arco que abarca, dS, es casi un segmento recto, por lo que se puede dibujar un triángulo rectángulo aquí. Su hipotenusa es dS, y dsin(x) es un cateto. Además, resulta que el ángulo que hay entre ambos lados es aproximadamente igual a x. Como dsin(x) es el cateto \*adyacente\* a este ángulo theta, se puede decir que la razón entre dsin(x) y dS es precisamente el coseno de x. O, puesto de otra forma, dsin(x) = cos(x)\*dS.

Pero, ¿cuánto vale dS? Aquí otra vez lo mismo: si x está en radianes, entonces dS es precisamente dx, por lo que dsin(x) = cos(x) \* dx. O en otras palabras, la derivada de sin(x) es igual a cos(x). Pero de nuevo, solo si trabajamos con radianes. SI el ángulo estuviese en grados, dS sería igual a (2pi/360)dx, y eso llevaría a que la derivada de sin(x) fuese (2pi/360)cos(x), y eso no se ve tan bien.

Otra forma de calcular la derivada, en vez de hacerlo de manera geométrica como hicimos recién, sería de manera puramente algebraica. Dada una función f(x), si le aplicamos un cambio dx, debería ocurrirle un cambio df = f(x + dx) – f(x), ¿verdad? Por lo que su derivada df/dx sería el límite de [f(x + dx) – f(x)] / dx, cuando dx tiende a 0. En este caso, la función que analizamos es sin(x). Esta función tiene la propiedad de que el seno de una suma es igual a esta expresión, así que la reemplazamos en la fórmula de la derivada. Toda esta fracción se puede separar en estas dos partes. La primera tiende a 0, por un límite notable que no voy a discutir ahora. Es más interesante la segunda parte, donde nos queda cos(x)sin(dx)/dx. Acá, se puede expresar como cos(x) por el límite, cuando dx tiende a 0, de sin(dx) / dx. Y este es el límite súper importante que ya habíamos discutido antes: si el ángulo está en radianes, este límite tiende a 1, así que el resultado final será simplemente cos(x). Pero si el ángulo está en grados, este límite tenderá a 2pi/360, y el resultado final sería (2pi/360)cos(x), un valor que no es tan cómodo de usar. Por eso preferimos los radianes.

Con los mismos argumentos de antes, se puede demostrar también que la derivada de cos(x) es -sin(x). Pero ojo, solo si x está en radianes, porque si está en grados sexagesimales, será (-2pi/360)sin(x).

No está de más agregar que, cuando usamos radianes, la derivada del seno es coseno, la del coseno es menos seno, la de menos seno es menos coseno y la de menos coseno es seno. O sea, después de derivar cuatro veces, volvemos al lugar donde partimos, hay una periodicidad acá, y esto está bastante interesante y genial.

Pero si usamos grados, la derivada del seno sería (2pi/360)coseno, la derivada de esto sería –((2pi/360)^2)seno, y así. Entonces, al derivar cuatro veces, no nos queda exactamente la misma función con la que empezamos, porque nos queda multiplicada por esta constante elevada a 4. Ya no hay periodicidad, y eso ya no está genial, es triste. Otra razón para preferir los radianes por sobre los grados.

SERIES DE TAYLOR DEL SENO Y EL COSENO